VI.

Resultados Básicos na Teoria da Dualidade: Vantagens e alguns usos em Microeconomia (*)

Juan Carlos Lerda(**)

RESUMO

Este trabalho, de caráter essencialmente didático, sintetiza alguns resultados básicos da teoria da dualidade tais como o Lema de Shephard, Lema de Hotelling e Identidade de Roy, ilustrando seus usos e vantagens comparativas — em relação ao que poder-se-ia chamar de enfoque ortodoxo — no contexto das teorias do consumidor e da firma. Enfatiza que ambos enfoques são as duas caras de uma mesma moeda e que não podem ser vistos de forma independente. No entanto, destaca-se que para uma série de problemas convencionais, o enfoque da toria da dualidade pode ser interpretado como sendo mais eficiente em vista da grande economia de tempo e de esforços oferecidos pelo uso dos mencionados resultados básicos.

1. INTRODUÇÃO

Não é fácil especificar como é que se processa a escolha dos temas habitualmente incluídos na versão semi-oficial da teoria econômica[1] O certo é que quando um tópico encontra seu caminho pela porta grande de algum livro de texto prestigiado,

---

(*) Trabalho selecionado pelo Comitê Organizador do IV Encontro Anual de ANPEC realizado no Hotel Nacional Rio de Janeiro, dezembro de 1977. Agradeço ao Professor Luis Paulo Rosenberg por valiosas sugestões e particularmente por ter evitado, pelo menos, um grosseiro erro de interpretação de minha parte, como também, aos comentaristas da Seção sobre Teoria Econômica, professores Dionísio Carneiro e Ebraim Eris. Reconhecimento especial para as detalhadas recomendações de dois (anônimos) membros do Conselho Editorial da Revista Estudos Econômicos, como também, para seu Editor-Responsável, professor André Franco Montoro Filho.

(**) O autor é professor do Departamento de Economia da Universidade de Brasília.

(1) Toma-se como proxy para tal conceito os livros de textos mais prestigiados em cada área. Enquanto que as revistas profissionais mais

existe um "efeito imitação" consideravelmente forte que lhe garante um lugar permanente nas páginas dos livros que lhe seguem.

De fato, a uniformidade dos temas tratados nos livros de texto de teoria econômica ortodoxa tem a força aplastante de um paradigma consideravelmente petrificado. O complemento simétrico de temas excluídos, pela sua vez, pode-se decompor em duas partes. Uma, evidentemente antagônica ao paradigma, que puxa pela sua radical renovação ou revogação, e que dificilmente consegue ser assimilada dentro da "Ciência Normal" exceto de maneira marginal, às vezes a título de curiosidade e não poucas vezes deturpada pelas vigorosas simplificações a que é submetida no curto espaço que lhe é concedido(2). Outra, claramente inserida dentro do âmbito do paradigma dominante, puxa pela sua admissão nos livros de texto à medida que um exaustivo tratamento nas revistas profissionais vai mostrando sua utilidade estratégica dentro das atividades diárias da Ciência Normal.

O tema deste trabalho situa-se, inequivocamente, dentro deste último grupo: pode-se afirmar que o conceito técnico da Dualidade ainda não tem sido devidamente acolhido no seio dos livros de texto de teoria econômica(3).

Antecipando que se trata de uma contribuição basicamente pedagógica cujo objetivo maior é colocar em destaque a utilidade e a eficiência de algumas "Dualidades" ou "relações simétricas" ou "relações recíprocas" que usualmente passam desapercebidas

(...)
importantes geralmente contém trabalhos situados na fronteira, os livros de texto refletem, com algum atraso, as partes já cristalizadas do paradigma de referência.

(2) Na verdade, seguindo a Thomas S. Kuhn (The Structure of Scientific Revolutions): «A Ciência Normal com frequência suprime novidades fundamentais porque são necessariamente subversivas a seus supostos básicos. Em compensação... a mesma natureza da pesquisa normal assegura que a novidade não será suprimida por muito tempo».

(3) Exceção parcial, e inevitável, é o tratamento de Dualidade no contexto de algum capítulo ou seção sobre Programação Linear. Um exemplo conhecido é o livro de texto de J.H. Henderson-R. E. Quandt: **Microeconomics Theory: A Mathematical Approach**, 2da. Ed. Cap. 9, 2., págs. 345-9. Um outro livro de texto «clássico» é o de W: J. Baumol: **Economics Theory and Operations Analysis**, 3ra. Ed. o que dedica um capítulo inteiro (Cap. 6) ao tema de Dualidade, também, no contexto de problemas de programação matemática de tipo linear. A quarta Edição, no seu Cap. 14, representa uma única exceção a esta regra.

nos livros de texto, este trabalho não entra nas profundezas da Teoria da Dualidade se bem que indica algumas referências bibliográficas importantes para quem deseja completar sua formação nestes temas. O nível, por tanto, é acessível para estudantes de graduação no final de sua carreira e nos cursos de mestrado, sem qualquer preocupação com as demonstrações matemáticas que caracacterizam a Teoria da Dualidade.

2. VANTAGENS DO ENFOQUE DA DUALIDADE E OBJETIVO DO TRABALHO

O tema central desta nota vincula-se a três resultados básicos da Teoria da Dualidade: (1) o Lema de Shephard, (2) a Identidade de Roy, e (3) o Lema de Hotelling[4].

A perspectiva que guia o trabalho é fundamentalmente expositiva e ilustrativa, motivo pelo qual tem-se apelado para o uso de diagramas e exemplos numéricos simples, os quais se encontram desenvolvidos no apêndice.

O tema Dualidade já é moeda quase corrente na literatura das revistas profissionais e em livros bastantes especifíficos, ambos de um nível geralmente avançado que o faz de difícil acesso para o leitor não especializado. Praticamente inexistem esforços para levá-lo ao plano dissecado do livro de texto e de torná-lo rapidamente acessível nas salas de aula de nível intermediário. Esta nota deve ser vista como um intento preliminar por preencher esta lacuna, o que a libera do tratamento matemático avançado com que o tema é geralmente abordado, como também, de qualquer pretensão de originalidade nos aspectos teórico-substantivos.

A Teoria da Dualidade (de maneira semelhante à Teoria das Preferências Reveladas no campo do consumidor) representa uma visão complementar e parcialmente alternativa ao enfoque ortodoxo (ou convencional) para o estudo da firma tanto quanto do consumidor[5] Trata-se de um aprimoramento teórico que tem três vantagens principais:

---

(4) Para uma apresentação destes resultados e referências a suas demostrações ver Diewert, W. E.: «Applications of Duality Theory» em Intriligator, M. D. — Kendrick, D. A., (Eds.): **Frontiers of Quantitative Economics**, Vol. II, North-Holland, 1974.

(5) Ver por exemplo, J. M. Henderson-R.E. Quandt.: **Microeconomic Theory**, Op. Cit. para uma exposição sistemática do que chamamos enfoque ortodoxo ou convencional.

2.1. — Trabalha com conceitos aparentemente mais fáceis de entender que os utilizados como ponto de partida pela análise convencional. De fato, esta usa as tão debatidas noções de Função de Utilidade Direta (FUD) e de Função de Produção (FP). No enfoque de dualidade os conceitos de partida são Funções de Custos (FC) e de Lucro (FL) (na teoria da firma), e Funções de Gasto (na teoria do consumidor). Todas estas são, em princípio, mais fáceis de interpretar porque são avaliadas em "termos monetários", em contraposição às anteriores (FUD e FP) que são expressas em "termos reais" De fato parece intuitivamente mais compreensível falar de gastos (e lucros ou custos) que falar de um índice de utilidade (ou de produção). Claro está que o enfoque de dualidade ainda se vale de noções relativamente abstratas como a de Função de Utilidade Indireta (FUI) (na Teoria do consumidor) e Função de Produção Indireta (FPI) (na teoria da firma), e aqui ambos enfoques ficariam num pé de gualdade. Mas em compensação pode-se dizer que a FDU é muito mais importante para o enfoque ortodoxo que a FUI para o enfoque da dualidade (o mesmo pode-se dizer da FP e da FPI, respectivamente). Resumindo pode-se classificar as funções usadas em cada caso como ponto de partida da seguinte forma:

	Enfoque Convencional	Enfoque da Dualidade
Teoria do Consumidor	1 — Função de Utilidade (FUD)	1 — Função de Custos (FC) 2 — Função de Utilidade Indireta (FUI)
Teoria da Firma	1 — Função de Produção (FP)	1 — Função de Custos (FC) 2 — Função de Produção Indireta (FPI) 3 — Função de Lucros (FL)

2.2. — Como natural decorrência do comentário anterior as FG, FC, FL adequam-se melhor para estudos empíricos (na medida em que as informações necessárias para aplicar técnicas de estimação encontram-se disponíveis com maior facilidade e as variáveis envolvidas são potencialmente passíveis de menores erros de medição) que, o que cabe esperar para, por exemplo, uma FUD. No campo da teoria da firma há exemplos de trabalhos nos quais se postulam funções (de custo e de lucros) tais que satisfaçam a condição de que suas primeiras derivadas parciais sejam lineares nos parâmetros a serem estimados. Assim, técnicas de regressão linear podem ser facilmente implementadas para estimar, por exemplo, funções de demanda por fatores(6)

2.3. — Uma terceira vantagem do enfoque da dualidade tem-se passado um tanto desapercebida devido à formidável (ou exotérica) roupagem matemática que geralmente acompanha o tratamento do tema(7). Trata-se da extraordinária economia de tempo, e portanto de esforços, proporcionada pelo uso de alguns resultados básicos da teoria da dualidade, quando comparado com o número de passos requerido pelo enfoque convencional na demonstração das mesmas proposições. O propósito específico desta Nota é destacar e ilustrar esta terceira vantagem com alguns exemplos tirados das teorias do consumidor e da firma.

O resto do trabalho tem a seguinte estrutura. A seção 3 contém alguns conceitos básicos e a notação usada para representá-los. A seção 4 é usada para apresentar os três resultados básicos da Teoria da Dualidade que são logo usados na seção 5 para ilustrar a maior eficiência deste enfoque sobre aquele que combinamos denominar convencional ou ortodoxo. Alguns exemplos numéricos são finalmente introduzidos para ilustrar as idéias anteriores, o que é feito sob a forma de um apêndice.

3. — ALGUNS CONCEITOS E NOTAÇÃO

O conceito de Dualidade a que se faz referência neste trabalho diz respeito à relação ou correspondência biunívoca existente entre funções que surgem no contexto de problemas de otimização, de forma tal que conhecendo uma é possível, sob certas condições, derivar a outra e vice-versa.

---

(6) Exemplos deste tipo de aplicações são: Diewert, W. E.: «An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function», JPE, 79, págs. 481-507, 1971. Nerlove, M.: **Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Function** cap. VI, North-Holland, 1965.

(7) Ver por exemplo a obra clássica (mas quase inacessível para os não especialistas) de R. W. Shephard: **Theory of Cost and Production Functions**, Princeton University Press. 1970.

A Teoria da Dualidade tem seu fundamento analítico nos trabalhos matemáticos desenvolvidos por Minkwoski, em 1911[8] Refere-se às propriedades associadas com o planteio e a solução de certos problemas aos quais se dá o nome genérico de Otimização. Mais especificamente, diz respeito a problemas de programação matemática cuja solução consiste na determinação do valor de certas variáveis (chamadas "instrumentos"), sujeitas a restrições predeterminadas (as que definem o "conjunto possível" de valores que os instrumentos podem assumir) tal que maximizem ou minimizem uma certa função (chamada "função-objetivo").

Usando uma notação similar à de Intrigator[9] e seguindo sua apresentação, seja:

x Um vetor (coluna) de "instrumentos" de ordem n x 1
F(x) Uma "função-Objetivo" que se deseja Otimizar
X Um "conjunto possível" definido como subconjunto do espaço euclidiano de n dimensões.

(1) Define-se o **problema geral de programação matemática** como:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max.} & F(x) \\ \text{s. à r.} & x \varepsilon X \end{array}} \qquad (1)$$

A restrição geral de que **x** e X assume formas concretas em determinadas circunstâncias. Supondo que se definem m funções $g_i(\mathbf{x})$, q.q.s.(*) i = 1... m, continuamente diferenciáveis nas variáveis instrumentos (chamadas "funções de restrição") e igual número de números reais (b_i) (chamados de "constantes de res-

(*) q.q.s. = qualquer que seja.

(8) A referência ao trabalho de Minkwoski, H. é: **Theorie der Konvexen Korper**, Berlin, 1911. Os trabalhos do matemático alemão Minkwoski, são considerados predecessores (junto com os de Frobenius e Markov) dos estudos de Leontief sobre sistemas de Insumo-Produto, tal como indicam Dorfman-Samuelson — Solow em **Linear Programming and Economic Analysis**, cap. 10, MacGraw-Hill, 1958.

(9) Intriligator, M. D.: **Mathematical Optimization and Economic Theory**, Cap. 2, Prentice-Hall, 1971. Note-se que maximizar (Fx) é o mesmo que maximizar A + B F(x) para B > 0, ou minizar A + B F(x), para B < 0.

trição") e representáveis em forma de vetor como **g(x)** e **b**, respectivamente, então, o problema geral de programação matemática, (1), pode assumir as seguintes formas específicas:

(2) **Problema de programação clássica**[10]

Max.	$F(x)$
s. à r.	$g(x) = b$

(2)

(3) **Problema de programação não-linear:**

Max.	$F(x)$
s. à r.	$g(x) \leq b$
	$x \geqslant 0$

(3)

Se a "Função Objetivo" é de tipo linear:

$$F(x) = \Sigma\, c_i\, x_i$$

e se as restrições são desigualdades, também lineares, da forma:

$$Ax \leq b$$

onde A é uma matriz de ordem m x n, então temos o conhecido

(4) **Problema de programação linear:**

Max.	$F(x) = c' x$
s. à r	$Ax \leq b$
	$x > 0$

(4)

Até aqui, os diferentes tipos de problemas de programação mencionados enfatizam uma cara da moeda (da Teoria de Otimização Estática). A outra cara é dada pelo problema de minimização de uma função objetivo mediante a escolha de valores adequados para as variáveis instrumentos sujeitas a certas res-

(10) Esta é a forma geral dos problemas usualmente tratados em microeconomia, isto é, com restrições diferenciáveis e sob a forma de igualdades. Ver, por exemplo, o problema do consumidor e da firma, em Henderson-Quandt. Op. Cit.

trições preestabelecidas. Ambas caras fazem parte de um todo que só pode ser entendido pela existência de, pela inter-relação entre, suas partes.

O conceito de Dualidade a que estamos nos referindo é semelhante, heuristicamente falando, com aquela idéia de "a outra cara da moeda" acima mencionada. Coloquemos uma moeda sobre uma mesa e vamos ver seu valor nominal (esfige) (primal), ficando oculto o lado da esfige (valor nominal) (dual). Mas o fato de que só o primal seja posto em evidência não nega a existência nem a correspondência daquele com seu dual e vice-versa. Assim, como as caras de uma moeda, primal e dual, isto é, o problema de maximização (minimização) e o problema de minimização (maximização), são as duas fases de um mesmo problema geral: o de Otimização. Falar, modelar e resolver um deles de maneira explícita implica ter falado, modelado e resolvido o outro em forma implícita.

Então, o conceito de Dualidade com que vamos tratar: (i) refere-se à propriedade matemática associada com problemas de otimização consistente em uma relação recíproca ou correspondente biunívoca entre a formulação dos problemas de maximização e minimização de funções sujeitas a restrições no campo de variabilidade de seus argumentos. Tal correspondência, foi sugerido, representa as duas caras de uma mesma moeda(11), (ii) implica uma relação simétrica não só no referente à formulação dos problemas acima mencionados (primal e dual), mas também, em relação aos resultados deles derivados. Neste sentido a relação recíproca ou simetria existente entre resultados duais permite passar de um deles para o outro e vice-versa. Esta característica é de extraordinária utilidade analítica tanto quanto empírica, e constitui um aspecto a ser destacado neste trabalho.

A fim de facilitar a exposição é conveniente apresentar alguns dos conceitos a serem utilizados e sua correspondente notação.

---

(11) Para uma iluminante apresentação d a simetria existente na formulação do primal e dual no contexto de Programação Linear, ver Intriligator M. D., Op. Cit. cap. 5, pág. 78. Também K. Lancaster: **Mathematical Economics**, Cap. 3, Seção 3.3. pág. 28.

(A) Teoria do Consumidor:

1 — $\boxed{U = U(X) = U(X_1 \quad . X_n)}$

índice ordinal chamado Função de Utilidade Direta (FUD) que satisfaz os requisitos convencionais de (i) não saciação, (ii) estrita quase convexidade (iii) existência de derivadas parciais de primeira e segunda ordem, e que depende das quantidades de bens $X_1 \quad . X_n$ consumidos(12).

2 — $\boxed{p = (p_1 \quad p_n)}$

vetor de preços de mercado associado com o vetor $X = (X_1 \quad X_n)$

3 — $\boxed{Y = \Sigma\, p_i X_i}$

o nível de renda nominal (do indivíduo ou família) que limita o valor nominal dos bens ($X_1 \quad X_n$) que podem ser adquiridos, usualmente referida como restrição orçamentária. Supõe-se que não há poupança nem endividamento, se bem que o relaxamento destes supostos não implicaria demasiadas complicações.

4 — $\boxed{Y = Y^* (p, U)}$

(12) Para facilitar a exposição nos limitaremos à teoria convencional do consumidor (tal como exposta em Henderson-Quandt, por exemplo) sem nenhuma referência aos trabalhos de K. Lancaster e G. Becker sobre a «Nova Teoria do Consumidor». Ver, por exemplo, R.T. Michael G.S. Becker: «On the New Theory of Consumer Behavior», **Swedish Journal of Economics**, págs. 378-396, December, 1973. A última importante colaboração sobre o tema é devida a G. J. Stigler — G.S. Becker: «De Gustibus Non Est Disputanelum», **AER**, págs. 76-90, Vol. 67, N.º 2, March 1977.

Função de Gastos (FG), indica o nível mínimo de despesas (ou renda nominal) requeridas para atingir predeterminados níveis do índice de utilidade, dado o vetor p de preços de mercado. Ela é positiva, linearmente homogênea em preços e não decrescente para cada nível do índice de utilidade. Ela é também estritamente crescente no argumento índice de utilidade para cada nível de p.

5 — $$\boxed{U = U^* \ (p, Y)}$$

Função de Utilidade Indireta (FUI), mostra o nível máximo do índice de utilidade compatível com um predeterminado nível de despesas (ou renda nominal), dado o vetor p de preços de mercado. Ela é uma função positiva, homogênea de grau zero em todos seus argumentos, estritamente crescente no nível de renda e não crescente em preços.

6 — $$\boxed{X_i = X_i \ (p, Y)}$$

Funções de Demanda Ordinária (FDO) ou Marshallianas. Elas são usualmente derivadas a partir das condições de equilíbrio correspondente a um consumidor que maximiza utilidade sujeito a uma restrição orçamentária. Como é sabido as FDO excluem a possibilidade de ilusão monetária, isto é, são homogêneas de grau zero em p e Y

7 — $$\boxed{X^i = X^i \ (p, U)}$$

Funções de Demanda Compensada (FDC) ou Hicksianas. Elas são usualmente derivadas a partir das condições de equilíbrio correspondente a um consumidor que minimiza despesas para cada nível de utilidade predeterminado. As FDC são homogêneas de grau zero em p.

(B) Teoria da Firma

8 — $$\boxed{Q = F(K,L)}$$

Função de Produção (FP), indica o máximo nível de produção capaz de ser gerado pela tecnologia disponível para cada combinação dos fatores capital e trabalho. Supõe-se que a FP satisfaz os requisitos convencionais de "bom comportamento"[13].

9 — $$\boxed{C = wL + rK}$$

Equação de Custos (EC) indica o nível de despesas da firma correspondente ao pagamento dos serviços de seus fatores.

10 — $$\boxed{C = C(w,r,Q)}$$

Função de Custo (FP) representa o mínimo de despesas requeridas para gerar um predeterminado nível de produção, dada a tecnologia disponível e o vetor de preços de fatores.

11 — $$\boxed{Q = F^{*}\ (w,r,C)}$$

Função de Produção Indireta (FPI), indica o máximo nível de produção compatível com um predeterminado orçamento destinado ao pagamento dos serviços dos fatores, dada a tecnologia disponível e o vetor de preços dos insumos.

12 — $$\boxed{\begin{aligned} K &= k(w,r,C) \\ L &= l(w,r,C) \end{aligned}}$$

(13) Ver, por exemplo, Burmeinster, E. Dobell, A. R.: **Mathematical Theories of Economic Growth**, Cap. 1, págs. 9-10.

Solução do Caminho de Expansão Ótimo (CEO) correspondente à condição de equilíbrio de uma firma que maximiza produção, sujeita a uma dada restrição orçamentária. Ainda que não sejam funções de demanda por fatores no sentido estrito da palavra (devido a que não levam em consideração a condição de maximização de lucros) elas guardam analogia formal (se bem que não conceitual) com as FDO definidas na teoria do consumidor (em todo caso as FDO podem ser interpretadas como o CEO correspondente à condição de equilíbrio de um indivíduo que maximiza utilidade sujeito a uma restrição orçamentária).

13 —
$$\boxed{\begin{array}{l} L = L(w,r,Q) \\ K = K(w,r,Q) \end{array}}$$

Solução do caminho de expansão ótimo (ceo) correspondente à condição de equilíbrio de uma firma que minimiza custos sujeita a uma dada restrição de nível de produção. Ainda que não sejam funções de demanda por fatores (devido a que não levam em consideração a condição de maximização de lucros) elas guardam analogia formal (se bem que não conceitual) com as FDC definidas na teoria do consumidor (em todo caso as FDC podem ser interpretadas como o ceo correspondente à condição de equilíbrio de um indivíduo que minimiza despesas para cada nível de utilidade).

14 —
$$\boxed{\pi = P(Q) \quad F(K,L) - wL \quad rK}$$

Equação de Lucros (EL), indica o nível de receita líquida total que a firma pode esperar para cada combinação de fatores, dada a tecnologia disponível, a função de demanda pelo seu produto e o vetor de preços de seus insumos.

15 —
$$\boxed{\begin{array}{l} L = L^{D} (w,r,P) \\ K = K^{D} (w,r,P) \\ Q = Q^{D} (w,r,P) \end{array}}$$

Funções de Oferta Líquida (FOL) ou Funções de Demanda Derivada (FDD). Tratando-se das duas primeiras fala-se em Funções de Demanda por Fatores (FDF), e costumam ser derivadas a partir da condição de equilíbrio de uma firma que maximiza lucros. A terceira resulta de substituir as anteriores na PF Este conjunto de funções indica a sensibilidade da demanda por insumo e da oferta de produto, por parte das firmas que maximizam lucros, ante variações de preços nos mercados de fatores e de produto respectivamente.

16 — $\boxed{\pi = \pi^*(w,r,P)}$

Função de Lucros (FL) indica o máximo de lucro compatível com um vetor de preços de mercado parametricamente dado, ou também, é o valor da função-objetivo (Equação de Lucro) avaliada no nível das FOL consistente com maximização de lucros[14]

4. RESULTADOS BÁSICOS DO ENFOQUE DA DUALIDADE

Entre a variedade de resultados derivados pela teoria da Dualidade há três que interessam especialmente no contexto da teoria do Consumidor e da firma. Eles são:

4.1. Lema de Shephard[15]:

As derivadas parciais de uma Função de Custos (na teoria da firma) ou de uma Função de Gastos (na teoria do consumidor)

(14) Jorgenson D. W.: Notas de Aula, Economics 2010-A, Department of Economics, Harvard University, Fall Semester, 1971, Cambridge, Mass. USA.

(15) O nome de Lema de Shephard deve-se ao fato de que foi R.W. Shephard o primeiro a dar grande destaque à dualidade entre FP e FC nos seus trabalhos já citados. No entanto, P. A. Samuelson no Capítulo IV de suas **Foundations** já apresenta o resultado hoje conhecido como Lema de Shephard (ver sua relação 55). O primeiro trabalho sistemático de Samuelson sobre as idéias de dualidade parece ter sido: «Prices of Factors and Goods in General Equilibrium». **Review of Economic Studies.** 21, págs. 1-20, 1953-54.

com respeito aos elementos do vetor de preços de mercado (de fatores, na teoria da firma, e de produtos, na teoria do consumidor) são iguais à solução dos correspondentes caminhos de expansão ótima (ceo).

Isto pode ser expressado simbolicamente da seguinte forma:

a) **Teoria do Consumidor:**

$$\frac{\partial Y^*(p,U)}{\partial p_i} = X^i = X^i\,(p, U)$$

Funções Demanda Compensada ou Hicksianas (q.q.s. = = 1 n).

b) **Teoria da Firma:**

$$\frac{\partial\, C\,(w,r,Q)}{\partial w} = L = L\ (w,r,Q)$$

$$\frac{\partial\, C\ (w,r,Q)}{\partial r} = K = K\ (w,r,Q)$$

Solução do caminho de expansão ótimo (ceo)

4.2 — Identidade de Roy(16).

Os quocientes entre as derivadas parciais da FPI respeito aos elementos do vetor de preços do mercado de fatores e a correspondente derivada parcial respeito ao nível da restrição orçamentária (na teoria da firma), e entre as derivadas parciais da FUI respeito aos elementos do vetor de preços do mercado de produtos e a correspondente derivada parcial respeito ao nível de renda nominal (na teoria do consumidor), em todos os casos precedidos de sinal negativo, são iguais à solução dos correspondentes caminhos de expansão ótima (CEO).

Isto pode ser expressado simbolicamente da seguinte forma:

(16) **Para uma derivação da Identidade de Roy ver H. Theil: Theory and Measurement of Consumer Demand, Vol. I, cap. 3, págs. 92-94, North-Holland, 1975.**

a) **Teoria do consumidor:**

$$-\frac{\dfrac{\partial U^* (p, Y)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial U^* (p, Y)}{\partial Y}} = X_i = X_i (p, Y)$$

Função de Demanda Ordinária, ou Marshalliana (q.qs. = = 1 n)

b) **Teoria da Firma:**

$$-\frac{\dfrac{\partial F^* (w,r,C)}{\partial w}}{\dfrac{\partial F^* (w,r,C)}{\partial C}} = L = l(w, r, C)$$

$$-\frac{\dfrac{\partial F^* (w,r,C)}{\partial r}}{\dfrac{\partial F^* (w,r,C)}{\partial C}} = K = k(w, r, C)$$

Solução do Caminho de Expansão Ótimo (CEO)

4.3 Lema de Hotelling:

As derivadas parciais da FL com respeito a cada um de seus argumentos é igual ao sistema de FOL.

Isto pode ser expressado simbolicamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial \pi^* (w,r,P)}{\partial w} = L = L^D (w,r,P)$$

$$\frac{\partial \pi^* (w,r,P)}{\partial r} = K = K^D (w,r,P)$$

$$\frac{\partial \pi^* (w,r,P)}{\partial P} = Q = Q^D (w,r,P)$$

Função de Oferta Líquida (FOL)

5. A EFICIÊNCIA DO ENFOQUE DA DUALIDADE vs. ENFOQUE CONVENCIONAL

Deve-se notar que o que chamamos de dois enfoques não é mais do que as duas caras de uma mesma moeda: otimização matemática de funções que satisfaçam dadas condições de regularidades, as que geralmente encontram-se sujeitas a certas restrições no campo de variabilidade de seus argumentos. Conseqüentemente, ambos enfoques pressupõem um mesmo "espírito otimizante", motivo pelo qual eles não são independentes. Muito pelo contrário, é a dependência interna (sob a forma de uma relação biunívoca) existente entre os pontos de partida de cada "enfoque" a essência das dualidades que vamos examinar, o que possibilita a comparação da eficiência com que cada um deles permite chegar a um mesmo resultado.

5.1 Teoria do Consumidor

De forma sintética pode-se dizer que o objetivo último da Teoria do Consumidor é derivar e estimar funções de demanda. Dependendo do tipo de análise, interessa obter FDO (Marshallianas) ou FDC (Hicksianas). Ainda que nem sempre seja enfatizado em termos analíticos, ambos sistemas de funções de demanda encontram-se biunivocamente ligados, como se mostra mais adiante. É no estudo desta inter-relação que pode-se observar a conveniência do enfoque da dualidade.

5.1.1 Como obter o sistema de FDO (Marshallianas)?

O enfoque convencional parte de uma FUD que se deseja maximizar sujeita a uma restrição orçamentária. À continuação se monta um Lagrangeano, derivando-se-o parcialmente, respeito as $(n + 1)$ variáveis $X_1, \ldots, X_n, \lambda$, e igualando a zero (supõe-se, pelo geral, que as condições de segunda ordem são satisfeitas). Resolvendo o sistema de equações simultâneas assim resultante encontra-se o sistema de FDO.

O enfoque da dualidade parte de uma FUI sobre a qual se aplica a Identidade de Roy, obtendo-se de forma imediata o sistema de FDO.

Esta economia de tempo e sforço possibilitada pelo enfoque da dualidade pode-se ilustrar com o seguinte diagrama:

Enfoque da Dualidade (Ponto de Partida)	Enfoque Convencional (Ponto de Partida)
$U = U^{*}(P, Y)$	Max. $U = U(X_1 \ldots X_n)$ s. ã r. $\bar{Y} = \Sigma p_i X_i$
↓	↓
	$L = U(X_1 \ldots X_n) + \lambda(\bar{Y} - \Sigma p_i X_i)$
↓	↓
	$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial X_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$
↓	↓
Identidade de Roy $- \frac{\partial U^{*}(P, Y)/\partial P_i}{\partial U^{*}(P, Y)/\partial Y} = X_i = X_i(P, Y)$	$X_i = X_i(P, Y)$

5.1.2 Como obter o sistema de FDC (Hicksianas)?

O enfoque convencional parte da minimização do total de dispêndio necessário para que o consumidor possa atingir um predeterminado nível de utilidade. À continuação se monta um Lagrangeano e deriva-se-o parcialmente respeito a cada uma das $n + 1$ variáveis, as que são igualadas a zero, supondo-se, pelo geral, que as condições de segunda ordem são satisfeitas. Resolvendo o sistema de equações simultâneas, assim resultante, encontra-se o sistema de FDC.

O enfoque da dualidade parte de uma FG sobre a qual se aplica o Lema de Shephard, obtendo-se de forma imediata o sistema de FDC.

A maior eficiência do enfoque da dualidade, comparando com o enfoque ortodoxo, pode-se ilustrar com o seguinte diagrama:

Enfoque da Dualidade (ponto de Partida)	Enfoque Convencional (ponto de Partida)
$Y = Y^* (P, U)$	Min. $Y = \Sigma P_i X_i$ s. à r. $\bar{U}$ $U(X_1 \ldots X_n)$
↓	↓
	$L = \Sigma p_i X_i + \mu \{\bar{U} - U(X_i \ldots X_n)\}$
↓	↓
	$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial X_n} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$
↓	↓
Lema de Shephard $\frac{\partial Y \ (P, Y)}{\partial P_i} = X^i = X^i \ (P,U)$	$X^i \quad X^i \ (P,U)$

Resumindo: Os dois casos anteriores não deixam lugar a dúvida de que o enfoque da dualidade é claramente mais eficiente que o convencional, tanto em termos da quantidade de passos intermédios envolvidos quanto no que se refere à laboriosidade dos mesmos (não se deve perder de vista que na hora de resolver o sistema de equações simultâneas a que o enfoque convencional invariavelmente nos conduz, se tivermos mais de três bens a análise complica-se, consideravelmente). No contexto dos problemas considerados resulta difícil evitar a tentação de uma analogia: o enfoque da dualidade equivale a um vôo direto (digamos entre Belém e Rio de Janeiro), entanto que o enfoque convencional equivale ao mesmo vôo, só que com escalas em Belo Horizonte e São Paulo (sob o suposto de que há vagas nos dois vôos, fica por conta do usuário decidir qual prefere).

Após a leitura desta espécie de "mapa" de inter-relações teóricas parece claro o motivo pelo qual o enfoque da dualidade é mais eficiente que o enfoque convencional a fins de derivação dos sistemas de FDO e FDC.

5.2 — Teoria da Firma

Tal como foi adiantado na seção 3, as FDO podem ser interpretadas como a solução do CEO correspondente à condição de equilíbrio de um consumidor que maximiza utilidade sujeito

SÍNTESE DAS DUALIDADES EXISTENTES ENTRE: (1) FUI e FG, (2) FDO e FDC:

	Caminho 1 :	Caminho 2 :
(3.1)	Max. $\dot{U} = U\,(X_1 \ldots X_n)$ s. ã r. $\bar{Y} = \Sigma P_i X_i$	Min. $Y = \Sigma p_i X_i$ s. ã r. $\bar{U} = U\,(X_i \ldots X_i)$
(3.2)	$L = U(X_i \ldots X_n) + \lambda\,(Y - \Sigma p_i X_i)$	$L = \Sigma p_i X_i + \mu\,\{\bar{U} - U(X_1 \ldots X_n)\}$
(3.3)	$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial X_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$	$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial X_n} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$
	FDO ou Marshallianas:	FDC ou Hicksianas:
(3.4)	$X_i = X_i\,(P, Y)$	$X^i = X^i\,(P, U)$
	Substituindo às FDO na função - objetivo se obtém a FUI:	Substituindo as FDC na função - objetivo se obtém a FG:
(3.5)	$U = U^*\,(P, Y)$	$Y = Y^*\,(P, U)$
	Resolvendo a FUI para o nível de renda nominal se obtém a FG.	Resolvendo a FG para o nível de utilidade se obtém a FUI:
(3.6)	$Y = Y^*\,(P, U)$	$U = U^*\,(P; Y)$
	Aplicando o Lema de Shephard à FG se obtém as FDC ou Hicksianas:	Aplicando a Identidade de Roy à FUI se obtém as FDO ou Marshallianas:
	$\frac{\partial Y^*\,(P, U)}{\partial p_i} = X^i = X^i\,(P, U)$ $\forall i = 1 \ldots n$	$-\frac{\partial U^*\,(P, Y)\,/\partial P_i}{\partial U^*\,(P, Y)\,/\partial Y} = X_i = X_i\,(P,U)$ $\forall i = 1 \ldots n$

a uma restrição orçamentária. No contexto da Teoria da Firma a recíproca não é verdadeira: a solução do CEO correspondente a uma empresa que maximiza lucros sujeita a uma restrição de dispêndio não pode-se interpretar como um sistema de funções de demanda por fatores. De forma análoga pode-se dizer que as FDC podem ser interpretadas como a solução do ceo de um consumidor que minimiza o dispêndio necessário para atingir níveis de utilidade predeterminados, mas a solução do ceo correspondente a uma firma que minimiza os custos requeridos para gerar um prefixado volume de produto não pode ser interpretada como um sistema de funções de demanda por fatores. O motivo é bem conhecido: a analogia entre consumidor e firma chega até o estágio dos caminhos de expansão ótimo (isto é, como combinar produtos ou insumos de forma ótima visando maximizar utilidade ou produção para uma dada restrição orçamentária, respectivamente), mas a firma tem um problema extra, qual seja, selecionar o nível de produção mais adequado (digamos aquele que maximiza lucros).

Assim, desde o ponto de vista da firma, a solução do CEO (ou do ceo) é uma condição necessária mas não suficiente para maximizar lucros, não sendo possível portanto dar-lhe a interpretação de funções de demanda por fatores. Como é sabido, para chegar até estas requere-se a introdução de um critério extra, como ser o de maximização de lucros.

No entanto nas qualificações anteriores ainda subsiste o fato de que a analogia mencionada permite adaptar o uso da Identidade de Roy e o Lema de Shephard para a derivação de resultados no contexto da teoria da firma. Ainda que incorrendo em óbvia repetição parece oportuno transladar o diagrama da Seção 5.1.1 (o que entre outras coisas mostra a relação biunívoca existente entre os sistemas de FDO e FDC) para o campo da teoria da firma (o qual permite visualizar a relação biunívoca existente entre FP e FC, isto é, como passar de uma FP a sua correspondente FC e vice-versa):

Este "mapa", adaptado à teoria da firma, permite apreciar uma vez mais a maior eficiência relativa do enfoque da dualidade comparado com o enfoque convencional. Assim, por exemplo, considerando a dualidade existente entre FP e FC cabe advertir uma evidente assimetria de esforço entre a passagem desde a FP até a FC [seguindo o Caminho 2: requer os passos (3.1)' - - (3.5)'] e a passagem desde a FC até a FP [seguindo o Cami-

SÍNTESE DAS DUALIDADES EXISTENTES ENTRE: (1) FP e FC, (2) CEO e ceo:

	Caminho 1 :	Caminho 2 :
(3.1)	Max. $Q = F\ (K,L)$ s. à r. $\bar{C} = wL + rK$	Max. $C \quad wL + rK$ s. à r. $\bar{Q} \quad F(K,L)$
(3.2)	$\mathcal{L} = F(K,L) + \lambda(\bar{C} - wL - rk)$	$\mathcal{L} = wL + rk + \mu\ \{(\bar{Q} - F\ (K,L)\}$
(3.3)	$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 0$	$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu} = 0$
	Solução do CEO :	Solução do ceo :
(3.4)	$L = l\ (w,r,C)$ $K = K\ (w,r,C)$	$L = L\ (w,r,Q)$ $K = K\ (w,r,Q)$
	Substituindo na FP obtemos a FPI:	Substituindo na EC obtemos a FC:
(3.5)	$Q = F^*(w,r,C)$	$C \quad C\ (w,r,Q)$
	Resolvendo a FPI para o nível da restrição orçamentária obtemos a FC:	Resolvendo a FC para o nível da produção obtemos a FPI:
(3.6)	$C \quad C\ (w,r,Q)$	$Q = F^*\ (w,r,C)$
	Aplicando o Lema de Shephard à FC se obtém a solução do ceo:	Aplicando a Identidade de Roy à FPI se obtém a solução do CEO:
(3.7)	$\frac{\partial C\ (w,r,Q)}{\partial w} = L = L\ (w,r,Q)$ $\frac{\partial C\ (w,r,Q)}{\partial r} = K = K\ (w,r,Q)$	$- \frac{\partial F^*\ (w,r,C)/\partial w}{\partial F^*\ (w,r,C)/\partial C} \quad L \quad l\ (w,r,C)$ $- \frac{\partial F^*\ (w,r,C)/\partial r}{\partial F^*\ (w,r,C)/\partial C} \quad K \quad K\ (w,r,C)$

nho 1: requer os passos (3.6)' -(3.7)' e resolver para o nível de produção a partir deste último]. Isto é, partindo do conceito "real" ou "primal" (e convencional) de FP requer-se de maior trabalho para chegar à correspondente FC, do que se precisa para, partindo do conceito "monetário" (e poderíamos dizer "dual") chegar à correspondente FP.

5.3 — Funções de Oferta Líquida (FOL), ou Funções de Demanda por Fatores (FDF)

Já foi visto o que poder-se-ia chamar de primeiro problema da firma (e que é o mesmo e único problema do consumidor): situar-se sobre o CEO (ou ceo). Com isto a empresa (consumidor) consegue a combinação ótima de insumos (produtos) para cada nível de produção (utilidade) compatível com restrições orçamentárias predeterminadas.

O segundo problema da firma é escolher um ponto sobre o caminho de expansão ótimo tal que satisfaça algum critério extra julgado desejável (digamos, maximizar lucros). Assim, uma firma que maximiza a diferença entre receita total e custo total, ou de forma equivalente, que iguale receita marginal a custo marginal (suposto que as condições de segunda ordem são satisfeitas) pode identificar o nível de produção que, além de otimizar o uso de fatores lhe deixa com maior rentabilidade.

Dado que uma firma que maximiza lucros (isto é, que resolve o que convencionávamos em chamar de segundo problema) tem garantida uma ótima alocação de recursos (isto é, tem implícitamente resolvido o primeiro problema), e sendo que a recíproca não é necessáriamente verdadeira, fica claro porque as soluções do CEO (ceo) não podem ser interpretadas como FDF.

5.4 — Como derivar as FDF?

O enfoque convencional consiste em postular como ponto de partida uma EL, a que se deriva parcialmente com respeito a cada um dos fatores, igualando estes resultados a zero (condições de primeira ordem para a existência de um máximo). Resolvendo o sistema de equações simultâneas assim resultante encontra-se o sistema de FDF.

O enfoque da dualidade parte de uma FL, a que derivada parcialmente respeito ao preço de cada fator dá como resultado imediato as FDF.

A maior eficiência relativa do enfoque da dualidade pode ser ilustrada como o seguinte diagrama:

ENFOQUE DA DUALIDADE

(Ponto de Partida)

$$\pi^* = \pi^* (w,r,P)$$

↓

Lema de Hotelling:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = L = L^D (w,r,P)$$
$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r} = K = K^D (w,r,P)$$

ENFOQUE CONVENCIONAL

(Ponto de Partida)

$$\text{Max. } \pi \quad P(Q).F(K,L)-wL-rK$$

↓

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \frac{\partial \pi}{\partial L} = 0$$

↓

$$L = L^D (w,r,P)$$
$$K = K^D (w,r,P)$$

Uma vez mais verifica-se que o enfoque convencional inclui passos extras, e o que talvez seja mais delicado, requer da solução de um sistema de equações simultâneas (que para modelos com três ou mais fatores implica considerável esforço adicional).

Um passo extra à derivação das FDF seria a determinação da função que vincula os níveis de produção oferecidos pela firma (que maximiza lucros) ante variações no vetor de preços de mercado (de insumos e produtos). Com tal fim o enfoque convencional implica a substituição das FDF na EL enquanto que o da dualidade requer a derivação parcial da FL respeito ao preço do produto. Para este caso não há uma diferença apreciável de eficiência em favor de qualquer um dos enfoques.

6. — CONCLUSÕES

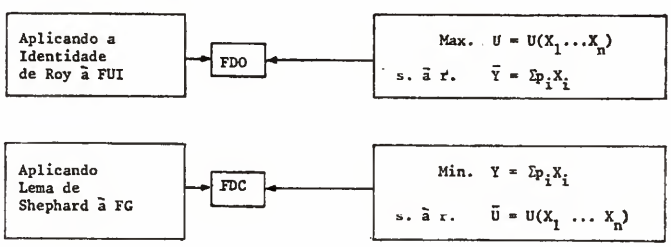
Após a análise e os diagramas precedentes parece suficientemente estabelecida a superioridade do enfoque da Dualidade sobre o enfoque convencional a fim de obter alguns resultados de interesse na Teoria do Consumidor e da Firma.

Assim, representando a quantidade de esforços e tempo requerido por cada enfoque, pela longitude de flechas ou vetores, podemos resumir o trabalho parcialmente com os diagramas da página seguinte.

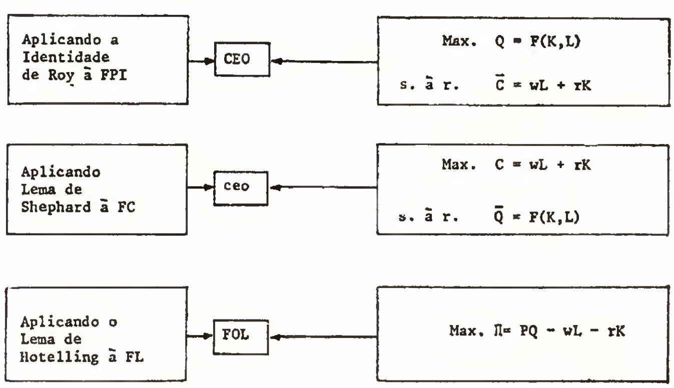
Mas é preciso dizer que a grande eficiência analítica do enfoque da Dualidade não se restringe ao limitado número de exemplos selecionados para este trabalho. Assim, por exemplo, quem tenha passado pela cansativa experiência de provar, de acordo com o enfoque convencional(17), que o efeito substituição é negativo, saberá apreciar a eficiência do enfoque da Dualidade quando este, apoiando-se na aplicação reiterada do Lema de Shephard à FG (e com base na propriedade desta de ser não-decrescente, ou côncava, em preços para cada nível de índice de utilidade) limita àquela prova à proposição: $\partial^2 Y^*(P, U)/\partial^2 P_i \leq 0$ (lembrando que segundo o Lema de Shephard a derivada parcial primeira da FG, respeito ao i-ésimo preço, é igual à correspondente FDC).

SÍNTESE DOS ENFOQUES DA DUALIDADE E CONVENCIONAL

(A) TEORIA DO CONSUMIDOR:



(B) TEORIA DA FIRMA:



(17) Ver, por exemplo, Henderson-Quandt, Op. Cit. Cap. I.

Na área de **Finanças Públicas** o enfoque da Dualidade tem sido proveitosamente aplicado para o estudo do excesso da carga tributária, impostos ótimos sobre mercadorias e critérios de interesse em investimentos públicos indivisíveis financiados por impostos globais **(lump sum taxation)**[18]. No campo dos estudos da **Economia do Bem-Estar** a FG tem sido usada para substituir as técnicas convencionais associadas com o conceito de excedente do consumidor tendo em vista o insatisfatório tratamento previsto por este para analizar o efeito-renda[19]. Na teoria do **Capital e do Crescimento** as idéias básicas do enfoque da Dualidade tem sido expostas e usadas por Bruno e estendidas por Burmeister-Kuga, referente à outra "cara da moeda" da fronteira de preços de fatores que vincula a taxa de salário real e a taxa de lucro ao longo de diferentes caminhos de expansão[20]. No campo da **Economia Internacional** as discussões sobre equalização de preços de fatores tem mostrado ser um terreno propício para detectar dualidades que vinculam importantes resultados da literatura especializada. Assim, nada menos que os Teoremas de Rybczynski e de Stolper-Samuelson tem implícita uma relação dual que passara desapercebida até o aparecimento da nota geométrica de Jones e posterior expansão analítica no seu clássico artigo sobre equilíbrio geral[21] Por último, cabe apontar o extenso uso do enfoque da dualidade feito pela **Teoria Econômica dos Números Índices**[22].

---

(18) Ver, por exemplo, P.A. Diamond — D.L. McFadden: «Some uses of the Expenditure Function in Public Finance», **Journal of Public Economics**, 3, págs. 3-21 1974. Este artigo inclui um breve e útil apêndice sobre a FG. suas propriedades, e o Teorema de Shephard-Uzawa vinculando biunivocamente a FG e a FUI.

(19) Ver por exemplo, J. C. Hause: «The Theory of Welfare Cost Measurement», **Journal of Political Economy**, Vol. 83, nº 6, págs. 1145-1182, December 1972. H. Mohring: «Alternative Welfare Gain and Loss Measure», **Western Economic Journal**, 9, págs. 349-368, December 1971.

(20) M. Bruno: «Fundamental duality relations in the pure theory of capital and growth», **Review of Economic Studies**, Vol. XXXVI, págs. 39-53, 1969. E. Burmeister K. Kuga: «The factor-price frontier, duality and joint-production», **Review of Economic Studies**, Vol. XXXVII, págs. 11-19, 1970.

(21) R. W. Jones: «Duality in International Trade: A Geometrical Note», **Canadian Journal of Economics and Political Science**, págs. 390-393, XXXI, n.º 3, August, 1965. — R. X. Jones: «The Structure of Simples General Equilibrium Models» **Journal of Political Economy**, págs. 557-572, LXXIII, December, 1965.

(22) H. Theill: **Economics and Information Theory**, Cap. 6, Seção 6.7., ...)

Esta rápida, e necessariamente incompleta, revisão das áreas de aplicação das idéias básicas do enfoque da dualidade serve para mostrar que os exemplos incluídos neste trabalho são apenas uma pequena amostra das possibilidades existentes.

A Teoria da Dualidade, na sua versão matemática, exige de conhecimentos não convencionais na formação do economista(23) No entanto, existem já disponíveis alguns resultados básicos como os aqui utilizados que permitem avançar rápida e suavemente por caminhos pelos quais o enfoque convencional se movimenta pesada e dificultosamente. Uma ênfase maior no uso do enfoque da dualidade, nas salas de aula, pode ter vantagens tais como: (1) possibilitar uma compreensão mais ampla de certos temas, na medida em que sejam visualizadas inter-relações que o enfoque convencional não enfatiza; (2) poupar esforços associados com penosas demonstrações, e (3) conseqüentemente, liberar tempo escasso para alocar em fins alternativos, como ser, refletir sobre o sentido de toda aquela parafernália.

7 — APÊNDICE

A ilustração dos pontos anteriores pode ser feita com um exemplo baseado na estrutura analítica de Cobb-Douglas.

Como é fácil de reconhecer, as duas primeiras seções diferem só em termos de notação, ou nome das funções envolvidas e

---

(...)

North-Holland, 1967. — H. Theil: **Theory and Measurement of Consumer Demand**, Vol. 1, Cap. 3, North-Holland, 1975. — F. M. Fisher — K. Shell: **The Economic Theory of Price Indices**, Academic Press, 1972. R.A. Pollak: «The Theory of the Cost of Living Index «Discussion Paper, Department of Economics, University of Pennsilvania, June, 1971. — S.N. Afriat: «The Theory of International Comparisons of Real Income and Prices» em D. J. Daly (Ed.): **International Comparisons of Price and Output**, NBER, 1972. Um excelente resumo destes temas com forte ênfase em dualidade é oferecido por P. A. Samuelson-S. Swamy: «Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis» **AER**, Vol. 64, n.º 4, págs. 566-593, September 1974.

(23) Ver, por exemplo, A.M. Geoffrion: «Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications Oriented Development», **SIAM Review**, Vol. 13, n.º 1, págs. 1-37, January, 1971, que para tranquilizar ao leitor adverte que: «The general approach is to exploit the powerful, concept of a perturbation function, thus permitting simplified proofs (no conjugate functions or fixed-point theorems are needed).

de suas correspondentes interpretações (a primeira referida à teoria do consumidor e a segunda à da firma), no entanto elas representam os mesmos passos e a mesma sustância. De fato, bastaria com preparar só uma delas e dispor de um "código" para traduzir a linguagem de uma teoria para a outra:

Teoria do Consumidor:		**Teoria da Firma**
1. FUD	equivale à	FP
2. FDO	equivale à	solução do CEO
3. FDC	equivale à	solução do ceo
4. FUI	equivale à	FPI
5. FG	equivale à	FC

(A) Teoria do Consumidor

$$U = U(X_1, X_2) = X^{\alpha}_1 \quad X^{\beta}_1$$

	Caminho 1: (Ponto de Partida):	Caminho 2: (Ponto de Partida):
1.	$\text{Max. } U = X_1^{\alpha}.X_2^{\beta}$ $\text{s. à r. } \bar{Y} = \Sigma P_i X_i$	$\text{Min. } Y = \Sigma P_i X_i$ $\text{s. à r. } \bar{U} = X_1^{\alpha} X_2^{\beta}$
	Langrangeano:	Langrangeano
2.	$\mathcal{L} = X_1^{\alpha} X_2^{\beta} + \lambda(\bar{Y} - P_i X_i)$	$\mathcal{L} = \Sigma P_i X_i + \mu(\bar{U} - X_1^{\alpha}.X_2^{\beta})$
	Condições de Equilíbrio	Condições de Equilíbrio
3.	$\frac{\alpha U}{X_1} - \lambda p_1 = 0 = \frac{\alpha \mathcal{L}}{\partial X_1}$ $\frac{\beta U}{X_2} \quad \lambda p_2 = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2}$ $\bar{Y} - \Sigma P_i X_i = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$	$P_1 - \frac{\alpha \mu \ U}{X_1} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1}$ $P_2 - \frac{\mu \beta \ U}{X_2} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2}$ $\bar{U} - X_1^{\alpha}.X_2^{\beta} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}$
	FDO ou Marshallianas:	FDC ou Hicksianas:
4.	$X_1 = \frac{\alpha Y}{(\alpha+\beta) \ P_1}$ $X_2 = \frac{\beta Y}{(\alpha+\beta) \ P_2}$ São homogêneas de grau zero em todos os argumentos	$X^1 = (\frac{\alpha P^2}{\beta P_1}) \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad U \ \frac{1}{\alpha+\beta}$ $X^2 = (\frac{\beta P_1}{\alpha P_2})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \ U. \ \frac{1}{\alpha+\beta}$ São homogêneas de grau zero em preços.

5 -

Função de Utilidade Indireta (FUI):

$$U = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right) \left(\frac{Y}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}$$

é crescente em renda nominal, decrescente em preços, e homogênea de grau zero em todos os argumentos.

Funções de Gastos (FG)

$$Y = (\alpha+\beta) \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{\beta} U^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

é crescente em todos os seus argumentos, e linearmente homogênea em preços.

6 -

Função de Gastos (FG):

$$Y = (\alpha+\beta) \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{\beta} U^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

é crescente em todos seus argumentos, e linearmente homogênea em preços.

Função de Utilidade Indireta (FUI)

$$U = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta} \left(\frac{Y}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}$$

é crescente em renda monetária, decrescente em preços, homogênea de grau zero em todos os argumentos

7 -

FDC ou Hicksianas:

$$x^1 = \frac{\partial Y^*(p,U)}{\partial p_1} = \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} U^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$x^2 = \frac{\partial Y^*(p,U)}{\partial p_2} = \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} . U^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

São homogêneas de grau zero em preços.

FDO ou Marshallianas

$$X_1 = -\frac{\dfrac{\partial U^*(p,Y)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial U^*(p,Y)}{\partial Y}} = \frac{\alpha Y}{(\alpha+\beta)\, p_1}$$

$$X_2 = -\frac{\dfrac{\partial U^*(p,Y)}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial U^*(p,Y)}{\partial Y}} \qquad \frac{\beta Y}{(\alpha+\beta)\, p_2}$$

São homogêneas de grau zero em todos os argumentos.

(B.1) Teoria da Firma: Optima Alocação de Recursos

	Caminho (1) : (Ponto de Partida)	Caminho (2) : (Ponto de Partida)
1 -	Max. $Q = K^{1/2} . L^{1/3}$ s. à r. $\bar{C} = wL + rK$	Min. $C = wL + rK$ s. à r. $\bar{Q} = K^{1/2} L^{1/3}$
	↓ Langrangeano:	↓ Langrageano:
2 -	$\mathcal{L} = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} + \lambda \ (\bar{C} - wL - rK)$	$\mathcal{L} = wL + rK + \mu \left[\bar{Q} - K^{1/2} . L^{1/3} \right]$
	↓ Condições de primeira ordem:	↓ Condições de primeira ordem:
3 -	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = Q/3L - w = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = Q/2K - r = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{C} - wL - rK = 0$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - Q/3L = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - Q/2K = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \bar{Q} - K^{1/2} L^{1/3} = 0$
	↓ Solução do CEO	↓ Solução do ceo
4 -	$L = 0.4 \ w^{-1} C$ $L = l \ (w,r,C)$ $K = 0.6 \ r^{-1} C$ $K = k(w,r,C)$ são homogêneas de grau zero em todos os argumentos	$L = 0.78 \ w^{-3/5} \ r^{3/5} \ Q^{6/5}$ $L = L \ (w,r,Q)$ $K = 1.18 \ w^{2/5} \ r^{-2/5} \ Q^{6/5}$ $K = K(w,r,Q)$ são homogêneas de grau zero em preços
	↓	↓

	Substituindo na FP obtemos a FPI:	Substituindo na EC obtemos a FC:
5 -	$Q = 0{,}5707\, w^{-1/3}\, r^{-1/2}\, C^{5/6}$ $Q = F^{*}(w,r,C)$ é homogênea de grau zero em todos seus argumentos.	$C = 1.96\, w^{2/5}\, r^{3/5}\, Q^{6/5}$ $C = C(w,r,Q)$ é homogênea de grau um em preços.
	Resolvendo a FPI para o nível de restrição orçamentária obtemos a FC:	Resolvendo a FC para o nível de produção obtemos a FPI:
6 -	$C = 1.96\, w^{2/5}\, r^{3/5} . Q^{6/5}$ $C = C(w,r,Q)$ é homogênea de grau um em preços.	$Q = 0.5707\, w^{-\frac{1}{3}}\, r^{-\frac{1}{2}}\, C^{5/6}$ $Q = F^{*}(w,r,C)$ é homogênea de grau zero em todos seus argumentos.
	Aplicando a Lema de Shephard à FC obtemos a solução do ceo:	Aplicando a Identidade de Roy à FPI obtemos a solução do CEO:
7 -	$\frac{\partial C}{\partial w} = L = 0.78\, w^{-3/5} .. r^{3/5}\, Q^{6/5}$ $L = L(w,r,Q)$ $\frac{\partial C}{\partial r} = K = 1.18\, w^{\frac{2}{5}}\, r^{-\frac{2}{5}}\, Q^{\frac{6}{5}}$ $K = K(w,r,Q)$ são homogêneas de grau zero em preços	$-\frac{\partial F^{*}/\partial w}{\partial F^{*}/\partial C} = L = 0.\ 4w^{-1}\, C$ $L = l(w,r,C)$ $-\frac{\partial F^{*}/\partial r}{\partial F^{*}/\partial C} = K = 0.6\, r^{-1}\, C$ $K = K(w,r,C)$ são homogêneas de grau zero em todos seus argumentos.

(B.2) Teoria da Firma: Maximização de Lucros

	Formulação do Problema	Exemplo
1 -	$\text{Max. } \pi = P \cdot Q - wL - rK$	$\text{Max. } \pi = P \cdot K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} - wL - rK$
	Condições de Equilíbrio:	
2 -	$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{\partial \pi}{\partial K} = 0$	$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{P}{3} K^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{2}{3}} - w = 0$ $\frac{\partial \pi}{\partial K} = \frac{P}{2} K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} - r = 0$
	Funções de Demanda Fatores (FDF)	
3 -	$L = L^D (w,r,P)$ $K = K^D (w,r,P)$ .... são homogêneas de grau zero em todos seus argumentos.	$L = 0{,}0046\ w^{-3} r^{-3} P^{6}$ $K = 0{,}0069\ w^{-2} r^{-4} P^{6}$
	Substituindo as FDF na FP obtemos a FOL:	
4 -	$Q = Q^D (w,r,P)$ .... é homogênea de grau zero em todos seus argumentos.	$Q = 0{,}0139\ w^{-2} r^{-3} P^{5}$

Substutuindo as FOL na EL obtemos a FL:

5 -	$\pi = \pi^{*}(w,r,P)$ .... ê homogênea de grau um em todos seus argumentos.	$\pi = 0{,}0023\, w^{-2}\, r^{-3} P^{6}$

Aplicando o Lema de Hotelling às FL obtemos as FOL:

6 -	$\frac{\partial \pi^{*}}{\partial w} = L = L^{D}(w,r,P)$ $\frac{\partial \pi^{*}}{\partial r} = K = K^{D}(w,r,P)$ .... $\frac{\partial \pi^{*}}{\partial P} = Q = Q^{D}(w,r,P)$ são homogêneas de grau zero em todos seus argumentos.	$L = 0{,}0046 w^{-3}. r^{-3}. P^{6}$ $K = 0{,}0069 w^{-2}. r^{-4}. P^{6}$ .... $Q = 0{,}0139 w^{-2}. r^{-3}. P^{5}$